2025年度 医学部　一般選抜　１次　1月23日　数学

Ⅰ　iを虚数単位とする．整式 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$ について，以下の問いに答えよ．

(a)　定数kに対し，４次方程式 $f(x) = k$ が異なる４つの実数解をもつのは，$k_1 < k < k_2$ のときである．

ただし，$k_1 = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$，　$k_2 = \boxed{\text{オ}}$ である．

４次方程式 $f(x) = k_1$ は異なる３つの実数解をもち，このうち重解以外の２つの解の和は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．

(b)　$x = \sqrt{2}\,i - 1$ は２次方程式 $g(x) = x^2 + \boxed{\text{ケ}}\,x + \boxed{\text{コ}} = 0$ の解であり，$f(x)$を２次式$g(x)$で割った余りは $\boxed{\text{サシ}}\,x + \boxed{\text{スセ}}$ である．したがって，

$$f(\sqrt{2}\,i - 1) = -\boxed{\text{ソ}} + \boxed{\text{サシ}}\sqrt{2}\,i$$

となる．

(c)　曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax + b$ が異なる２点で接するとき，接点のx座標をα，βとして

$$f(x) - (ax + b) = 3(x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

と表すことができる．両辺のxの各次数の係数を比較することで

$$\alpha + \beta = -\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}},\qquad \alpha\beta = -\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

であることがわかり，$a = \dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，$b = \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ となる．

II　定数 a，b に対し，関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\[2ex] \dfrac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x} & (x<0 \text{ のとき})\end{cases}$$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとして，以下の問いに答えよ．

(a)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき $\tan x<x<\sin x$ が成り立つことを利用すると，

$$\lim_{x\to -0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\boxed{\text{ア}}$$

となることがわかる．

(b)　$\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)=\frac{b}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x)=\boxed{\text{ウ}}$ であるので，関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であることから，$b=\boxed{\text{エ}}$ とわかる．また，$\displaystyle\lim_{x\to +0} f'(x)=\frac{a}{\boxed{\text{オ}}}$ であり，設問(a)の結果を利用すると $\displaystyle\lim_{x\to -0} f'(x)=\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となるので，関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることから，$a=\boxed{\text{ケコ}}$ と定まる．

(c)　曲線 $y=f(x)$ の $x=0$ における接線の式は $y=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}x+\boxed{\text{セ}}$ である．この接線と曲線 $y=f(x)$ の交点のうち，$x>0$ を満たす点の x 座標を u とする．$u=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，

$$\int_0^u f(x)\,dx=\boxed{\text{チ}}-\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}+\boxed{\text{ト}}\log_e\frac{\boxed{\text{ナ}}+\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

が成り立つ．ただし，e は自然対数の底である．

Ⅲ　座標空間において，x 軸および y 軸からの距離が共に1であるような点全体の集合を L とし，L と xy 平面との交点のうち，第1～4象限にある点を順に点A，B，C，Dとする．また，L と z 軸との交点のうち，z 座標が正である点をE，負である点をFとする．

x 軸および y 軸からの距離が共に1以下であるような点全体の集合から，八面体 E-ABCD-F の内部を除いてできる立体を K として，以下の問いに答えよ．

(1)　L は原点を中心とする2つの楕円からなり，このうち点Aを通る楕円の内部の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\,\pi$ である．

K に属する点のうち，x 軸からの距離が1であるような領域の展開図は2つの正弦曲線で囲まれた図形であり，その面積は $\boxed{\text{イ}}$ である．

立体 K を $z=t$（ただし $-1 \leqq t \leqq 1$）で表される平面で切ってできる断面の面積は $\boxed{\text{ウエ}}\,t^2+\boxed{\text{オ}}\,|t|$ であり，K の体積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる．

立体 K を $x=u$（ただし $0<u<1$）で表される平面で切ってできる断面の面積 S は，$u=\cos\theta$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ を用いて

$$S=\boxed{\text{ク}}\,\theta+\sin\left(\boxed{\text{ケ}}\,\theta\right)+\cos\left(\boxed{\text{ケ}}\,\theta\right)-\boxed{\text{コ}}$$

と書くことができる．S は $u=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ をとる．

(2) 八面体 E–ABCD–F の辺を通って1秒ごとに隣接する頂点に移動する動点Pを考える．点Pが xy 平面上のいずれかの頂点から1秒後に点Eに移動する確率は $\frac{1}{3}$，点Fに移動する確率は $\frac{1}{6}$ であるとし，八面体のいずれかの頂点から1秒後に点E，F以外の隣接する頂点の1つに移動する確率は $\frac{1}{4}$ であるとする．

時刻 $t=0$ において点Eに存在した動点Pが，n 秒後に点Eに存在する確率を p_n，点Fに存在する確率を q_n とすると，自然数 n に対し

$$p_{n+1} = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}(1-p_n-q_n), \qquad q_{n+1} = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}(1-p_n-q_n)$$

が成り立つ．このとき，動点Pが4秒後に点Aに存在する確率は $\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}$ であり，点Fに存在する確率が最も高くなるのは $\boxed{ナ}$ 秒後で，その確率は $\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である．また，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$$

が成り立つ．